

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésztre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$A = \{3; 5; 6; 8; 9\}$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
Összesen:	2 pont	

2.		
Az átlagos jövedelem 160 000 Ft.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
A sütemény összköltsége 640 Ft.	1 pont	
A vaj költsége ennek $\frac{3}{8}$ része.	1 pont	<i>Ez a pont a 240 és a 640 arányának bármilyen formában történő meghatározásáért jár.</i>
A kérdéses körcikk középponti szöge 135° .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

4.		
1) párja C)	1 pont	
2) párja A)	1 pont	
Összesen:	2 pont	

5.		
Az adatokat feltüntető helyes ábra, az út hossza x .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül jól dolgozik.</i>
$x = \frac{124}{\sin 6,5^\circ} \approx$	1 pont	
≈ 1095 méter hosszú az út.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha a vizsgázó a $\sin 6,5^\circ$-nak más, legalább két tizedesjegyre helyesen kerekített értékével jól számol.</i>
Összesen:	3 pont	

6.		
A metszéspont $M(2; 0)$.	2 pont	<i>Koordinátánként 1-1 pont jár.</i>
Az egyenes meredeksége -2 .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

7.		
$x^2 + 10x + 21 = (x + 5)^2 - 4$	2 pont	
A minimumhely -5 .	1 pont	
A minimum értéke -4 .	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó meghatározza a függvény zérushelyeit (-7 és -3) és ezek segítségével helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó a függvényt jól ábrázolja és az ábra alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

8.		
A) hamis B) hamis C) igaz	2 pont	2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.
Összesen:	2 pont	

9.		
$k = 8$	2 pont	Nem bontható.
Összesen:	2 pont	

10.		
B és D az első két helyen 2-féleképpen végezhet.	1 pont	
Mögöttük A , E és F sorrendje $3! = 6$ -féle lehet.	1 pont	
Így összesen $2 \cdot 6 = 12$ -féleképpen érhetnek célba a versenyzők.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

11.		
A módusz 5 ,	1 pont	
a medián 4 .	1 pont	
Összesen:	2 pont	

12.		
A kért valószínűség $\frac{3}{8} (= 0,375)$.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

II. A

13. a)		
A sorozat differenciáját d -vel jelölve: $45,5 = \frac{2 \cdot 2 + (7-1)d}{2} \cdot 7.$	1 pont	$a_4 = \frac{45,5}{7} = 6,5$
$13 = 4 + 6d$	1 pont	$3d = 4,5$
$d = 1,5$	1 pont	
$a_6 = 2 + 5 \cdot 1,5$	1 pont	
A sorozat 6. tagja 9,5.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

13. b)		
A sorozat hányadosát q -val jelölve: $5q + 5q^2 = 10.$	1 pont	
$q_1 = -2; q_2 = 1$	2 pont	
Ha a hányados -2 , akkor a sorozat első hét tagjának összege: $S_7 = 5 \cdot \frac{(-2)^7 - 1}{-2 - 1} =$	1 pont	
$= 215.$	1 pont	
Ha a hányados 1 , akkor a sorozat tagjai megegyez- nek,	1 pont	
így ebben az esetben az első hét tag összege ($7 \cdot 5 =$) $35.$	1 pont	
Összesen:	7 pont	

14. a)		
A kérdéses súlyvonalra a P csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
A QR szakasz felezőpontja $F(4; -0,5)$.	1 pont	
A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}(10; 0,5)$.	1 pont	
A súlyvonal egyenlete: $x - 20y = 14$.	2 pont	<i>Bármely ezzel ekvivalens egyenlet is elfogadható.</i>
Összesen:	5 pont	

14. b) első megoldás		
(A kérdéses szöveg a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $\overrightarrow{PQ}(12; -5)$ és $\overrightarrow{PR}(8; 6)$.	2 pont	
A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 12 \cdot 8 + (-5) \cdot 6 (= 66)$.	1 pont	
Az oldalvektorok hossza $ \overrightarrow{PQ} = 13$ és $ \overrightarrow{PR} = 10$.	1 pont	
A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} =) 66 = 13 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szöveget jelöli.	1 pont	
Innen $\cos \alpha \approx 0,5077$.	1 pont	
$\alpha \approx 59,5^\circ$ (mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$).	1 pont	<i>Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott eredmény is elfogadható.</i>
Összesen:	7 pont	

14. b) második megoldás		
A PQR háromszög oldalainak hosszát a két pont távolságának kiszámításához használt képlettel határozzuk meg.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
$PQ = 13, PR = 10, QR = \sqrt{137} (\approx 11,7)$	2 pont	<i>Két oldal helyes kiszámolásáért 1 pont, más esetben 0 pont jár.</i>
Írjuk fel a PQR háromszög QR oldalára a koszinusztételt: $(\sqrt{137})^2 = 10^2 + 13^2 - 2 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \cos \alpha$, (ahol α a háromszög P csúcsánál lévő belső szöveget jelöli.)	1 pont	
Innen $\cos \alpha \approx 0,5077$.	2 pont	
$\alpha \approx 59,5^\circ$ (mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$).	1 pont	<i>Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott eredmény is elfogadható.</i>
Összesen:	7 pont	

15. a)		
A járulékokra levont összeg $200\,000 \cdot 0,17 = 34\,000$ (Ft).	1 pont	
A személyi jövedelemadóra levont összeg $200\,000 \cdot 1,27 \cdot 0,17 = 43\,180$ (Ft).	1 pont	
Kovács úr nettó bére: $200\,000 - 34\,000 - 43\,180 + 15\,100 =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
$= 137\,920$ Ft.	1 pont	
Ez a bruttó bérének megközelítőleg a 69%-a.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. b)		
Ha Szabó úr bruttó bére az adott hónapban x Ft volt, akkor járulékokra $0,17x$ Ft-ot,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
személyi jövedelemadóra pedig $0,17 \cdot 1,27x$ Ft-ot vontak le.	1 pont	
$x - 0,17x - 0,17 \cdot 1,27x + 5980 = 173\,015$	2 pont	
$0,6141x = 167\,035$	1 pont	
Ebből $x \approx 272\,000$.	1 pont	
Szabó úr bruttó bére 272 000 Ft volt.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

II. B

16. a)		
Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve):		
	4 pont	<i>Három csúcs helyes fokszáma 1 pontot, négy csúcsé 2 pontot, öt csúcsé 3 pontot ér.</i>
Összesen:	4 pont	

16. b) első megoldás		
Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna,	2 pont	<i>Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó egy gráfon egyértelműen jelöli az AB élt és az F-ből (vagy E-ből) induló négy élt.</i>
akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna.	1 pont	
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna.	2 pont	<i>Az „ellentmondásra jutás” bármilyen helyes indoklásáért jár ez a 2 pont.</i>
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

16. b) második megoldás		
Feri a négy meccse között vagy játszott Andival, vagy nem.	1 pont	
Ha játszott vele, akkor Andi az egyetlen meccsét nem játszhatta Barnabással.	1 pont	
Ha nem játszott vele, akkor Feri Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszott.	1 pont	
Ez utóbbi esetben Enikőre is igaz, hogy vagy játszott Andival vagy nem. Ha játszott vele, akkor Andi az egyetlen meccsét nem játszhatta Barnabással,	1 pont	
ha nem, akkor Enikő a maradék három meccsét Barnabással, Csabával és Danival játszotta le.	1 pont	
Ekkor viszont már Barnabás a két meccsét Enikővel és Ferivel játszotta, tehát nem játszhatta Andival (aki csak Danival játszhatott).	1 pont	
Összesen:	6 pont	

16. c)		
A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Összesen $\left(\frac{6 \cdot 5}{2} =\right)$ 15 mérkőzés szükséges (összes eset száma).	2 pont	
Eddig 8 mérkőzés zajlott le,	1 pont	
tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma).	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{7}{15}$ ($\approx 0,47$).	1 pont	<i>Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	7 pont	

17. a) első megoldás		
Ha $x < 3$, akkor ($3 - x > 0$, ezért)	1 pont	
$x + 2 \geq 0$, vagyis $x \geq -2$.	1 pont	
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2; 3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek.	1 pont	<i>A $-2 \leq x < 3$ jelölés is elfogadható.</i>
Ha $x > 3$, akkor ($3 - x < 0$, ezért)	1 pont	
$x + 2 \leq 0$, vagyis $x \leq -2$.	1 pont	
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.	1 pont	
A megoldáshalmaz: $[-2; 3[$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

17. a) második megoldás		
A vizsgázó megrajzolja (vázolja) az $x \mapsto x + 2$ és az $x \mapsto 3 - x$ elsőfokú függvények grafikonját, vagy a számláló és a nevező előjelét külön-külön helyesen állapítja meg számegyenes segítségével vagy szövegesen indokolva.	2-2 pont	<i>Ha a függvények monotonitása és zérushelye is jól jelenik meg az ábrán, akkor jár ez a 2-2 pont</i>
Megállapítja, hogy a $] -\infty; -2[$ intervallum elemei nem megoldások.	1 pont	<i>Szöveges vagy a számegyenes segítségével, ábrával alátámasztott indoklás egyaránt elfogadható.</i>
Megállapítja, hogy a $[-2; 3[$ intervallum elemei mind megoldások.	1 pont	
Megállapítja, hogy a $[3; +\infty[$ intervallum elemei nem megoldások.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 3-at elfogadja megoldásként, akkor ezért 2 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó a (-2)-t nem adja meg megoldásként (nem vizsgálja az egyenlőséget), akkor ezért 1 pontot veszítsen.

17. b)		
$5 \cdot 3^x = 20$	1 pont	
$3^x = 4$	1 pont	
$x = \log_3 4$	1 pont	$x \lg 3 = \lg 4$
$x \approx 1,2619$	1 pont	<i>Csak a megadott alakért jár ez a pont.</i>
Összesen:	4 pont	

17. c)		
(A megadott egyenlet $\cos x$ -ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával	1 pont	
$\cos x = 0,5$	1 pont	
vagy $\cos x = -2$.	1 pont	
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum).	1 pont	
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó a megadott alaphalmazt nem veszi figyelembe vagy fokban (jól) adja meg a választ $(-60^\circ; 60^\circ)$, akkor 1 pontot kapjon.</i>
Összesen:	6 pont	

18. a)		
Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} (\approx 2,83)$ (cm).	1 pont	
Egy oldallap területe $\frac{2 \cdot \sqrt{8}}{2} (\approx 2,83)$ (cm ²).	1 pont	
A test felszíne: $A \approx 22,6$ cm ² .	1 pont	
A testet alkotó gúla magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúla oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból (például megfelelő ábrából) kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
A gúla m magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2 = 3^2 - \left(\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2$.	1 pont	
$m = \sqrt{7} (\approx 2,65)$ (cm)	1 pont	
A gúla térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{7} (\approx 3,53)$ (cm ³).	1 pont	
A test térfogata ennek kétszerese,	1 pont	
azaz megközelítőleg 7,1 cm ³ .	1 pont	
Összesen:	9 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a feladat megoldása során rosszul kerekít, vagy válaszában nem kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

Ha a vizsgázó valamelyik választ mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

18. b) első megoldás		
Az összes (egyenlően valószínű) eset száma $8^4 (= 4096)$.	1 pont	
5-nél többet dobni háromféleképpen lehet (6, 7, 8).	1 pont	
Az olyan esetek száma, amelyben mind a négy dobás 5-nél nagyobb $3^4 (= 81)$.	1 pont	
Pontosan három 5-nél nagyobb dobás úgy lehetséges, hogy a négy dobás közül az egyik nem ilyen.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Az ilyen esetek száma $4 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) (= 540)$.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon.</i>
A kedvező esetek száma $81 + 540 = 621$.	1 pont	
A kért valószínűség $\frac{621}{4096} (\approx 0,152)$	1 pont	<i>Százalékban megadott helyes válaszáért is jár ez a pont.</i>
Összesen:	8 pont	

18. b) második megoldás		
$P(\text{egy adott dobás } 5\text{-nél nagyobb}) = \frac{3}{8}$	2 pont	
$P(\text{mind a négy dobás nagyobb } 5\text{-nél}) = \left(\frac{3}{8}\right)^4 (\approx 0,0198)$	1 pont	
$P(\text{három dobás nagyobb } 5\text{-nél, egy nem}) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8} (\approx 0,1318)$	2 pont	
A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz $\approx 0,152$.	1 pont	
	2 pont	<i>Százalékban megadott helyes válaszáért is jár ez a pont.</i>
Összesen:	8 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a binomiális eloszlás képletét használva helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.