

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2014. május 6.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

**I.**

<b>1. a)</b>		
Egy kis téglalap oldalainak hossza $x$ cm, illetve $x + 1$ cm, területe $x \cdot (x + 1) \text{ cm}^2$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A feladat szövege szerint $720 \cdot x \cdot (x + 1) = 2025$ .	1 pont	
(A zárójelet felbontva és nullára rendezve:) $720x^2 + 720x - 2025 = 0$ .	1 pont	<i>(45-tel egyszerűsítve: <math>16x^2 + 16x - 45 = 0</math>)</i>
(A megoldóképlettel) $x_1 = 1,25$ ; $x_2 = -2,25$ .	1 pont	
A negatív gyök nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A téglalap rövidebb oldala tehát 1,25 cm, hosszabb oldala pedig 2,25 cm hosszú.	1 pont	
Ellenőrzés: $720 \cdot 1,25 \cdot 2,25 = 2025$ igaz, tehát a válasz helyes.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>1. b)</b>		
12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Mivel $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ , ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal.	1 pont	
Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 vagy 64.	1 pont	
Mindegyik végződés $4!$ ( $= 24$ ) darab hatjegyű szám esetében fordul elő,	1 pont	
ezért a vizsgált számok között $8 \cdot 24 = 192$ darab 12-vel osztható van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>2.</b>		
A (feladat szövege és a) négyzetgyök értelmezése miatt csak az 5-nél nem nagyobb pozitív egész számok jöhetnek szóba, és ezek mindegyike meg is felel.	2 pont	<i>Ha <math>x \leq 5,2</math>, akkor <math>5,2 - x \leq 9</math>, ebből <math>-3,8 \leq x</math> (és <math>x</math> pozitív egész).</i>
$H = \{1; 2; 3; 4; 5\}$	1 pont	
Ha $\log_b 2^6 = k$ , akkor $b^k = 2^6 (= 64)$ .	2 pont	
A $k$ kitevő pozitív egész, ezért a $b$ olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$ ,	2 pont*	<i>Egy hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.</i>
ezért $B = \{2; 4; 8; 64\}$ .	1 pont*	
$H \cap B = \{2; 4\}$	1 pont	
$B \setminus H = \{8; 64\}$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	

*A \*-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Mivel a 2 prímszám, ezért $b$ is csak a 2 valamelyik pozitív egész kitevőjű hatványa lehet (a számelmélet alaptétele miatt).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Emiatt a $k$ pozitív egész szám a 6-nak osztója, tehát $k \in \{6; 3; 2; 1\}$ .	2 pont	<i>Egy hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.</i>
A megfelelő $b$ értékek rendre 2, 4, 8, 64, tehát $B = \{2; 4; 8; 64\}$ .	1 pont	

**3. a)**

A nehezek térfogata egy forgáskúp és egy csonkakúp térfogatának összege.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
<p>(Használjuk az ábra jelöléseit!) A forgáskúp magassága az <math>AFB</math> derékszögű háromszögből: <math>m = 2 \cdot \cos 54^\circ (\approx 1,18 \text{ cm})</math>.</p>	2 pont	<i>Az <math>AFB</math> derékszögű háromszög egyik hegyesszögének meghatározása: 1 pont, az <math>m</math> magasság meghatározása szögfüggvénnyel: 1 pont.</i>

A kúp alapkörének sugara: $r = 2 \cdot \sin 54^\circ (\approx 1,62 \text{ cm})$ .	1 pont	
A csonkakúp $h$ magassága a $CGD$ derékszögű háromszögből: $h = 2 \cdot \sin 72^\circ (\approx 1,90 \text{ cm})$ .	2 pont	<i>A <math>CGD</math> derékszögű háromszög egy hegyesszögének meghatározása: 1 pont, a <math>h</math> magasság meghatározása szögfüggvénnyel: 1 pont.</i>
A forgáskúp térfogata: $V_{\text{kúp}} \approx \frac{1,62^2 \cdot 1,18 \cdot \pi}{3} (\approx 3,24 \text{ cm}^3)$ .	1 pont	
A csonkakúp térfogata (a fedőkör sugara 1 cm): $V_{\text{cskúp}} \approx \frac{1,90 \cdot \pi}{3} \cdot (1,62^2 + 1,62 \cdot 1 + 1^2) (\approx 10,39 \text{ cm}^3)$ .	1 pont	
A nehezek térfogata: $(V_{\text{kúp}} + V_{\text{cskúp}} \approx) 13,6 (\text{cm}^3)$ .	1 pont	<i>Más, ésszerű és helyes kerekítésekkel kapott (egy tizedesjegyre kerekített) érték is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

**3. b)**

A gyakorisági táblázat:	1 pont	<i>Csak hibátlan táblázat esetén jár ez a pont.</i>												
<table border="1"> <tr> <td>tömeg (gramm)</td> <td>105</td> <td>106</td> <td>107</td> <td>108</td> <td>109</td> <td>110</td> </tr> <tr> <td>gyakoriság</td> <td>12</td> <td>36</td> <td>36</td> <td>18</td> <td>12</td> <td>6</td> </tr> </table>			tömeg (gramm)	105	106	107	108	109	110	gyakoriság	12	36	36	18
tömeg (gramm)	105	106	107	108	109	110								
gyakoriság	12	36	36	18	12	6								
A 120 adat átlaga: $\frac{12 \cdot 105 + 36 \cdot 106 + 36 \cdot 107 + 18 \cdot 108 + 12 \cdot 109 + 6 \cdot 110}{120} =$	1 pont													
$= 107$ (gramm).	1 pont													
A 120 adat szórása: $\sqrt{\frac{12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 1^2 + 36 \cdot 0^2 + 18 \cdot 1^2 + 12 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2}{120}} =$	1 pont													
$= \sqrt{1,7} \approx 1,3$ (gramm).	1 pont													
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>													

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a számítás részletezése nélkül (számológéppel) az átlagra és/vagy a szórásra helyes eredményt ad meg, akkor jár a megfelelő 2 pont. Részletezés nélküli (hibás) megoldásra azonban részpontszám nem adható.*

<b>4. a)</b>		
Az $f$ deriváltfüggvénye: $(f: ]-2; 3[ \rightarrow \mathbf{R}) f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ .	1 pont	
$f'$ zérushelyei: $-1$ és $2$ .	1 pont	
Az $f'$ másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, ezért $f'$ értékei $x < -1$ esetén pozitívak, $-1 < x < 2$ esetén negatívak, $2 < x$ esetén pozitívak.	1 pont	<i>Ez a pont jár egy helyes ábráért is.</i>
Az $f$ függvény menete ezek alapján: a $]-2; -1]$ -on (szigorúan monoton) növekvő;	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az <math>f</math> függvény értelmezési tartományát, azaz nem vagy rosszul adja meg az intervallum bal oldali végpontját.</i>
az $x = -1$ helyen (helyi) maximuma van,	1 pont	
amelynek értéke $3,5$ ;	1 pont	
a $[-1; 2]$ -on (szigorúan monoton) csökkenő;	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha az intervallum végpontjait és a monotonitást jól adja meg a vizsgázó, de nyílt vagy félig nyílt intervallumot ír.</i>
az $x = 2$ helyen (helyi) minimuma van,	1 pont	
amelynek értéke $-10$ ;	1 pont	
a $[2; 3[$ -on (szigorúan monoton) növekvő.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az <math>f</math> függvény értelmezési tartományát, azaz nem vagy rosszul adja meg az intervallum jobb oldali végpontját.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	

*Megjegyzések:*

- 1. A monotonitási intervallumok megadásáért akkor is jár a megfelelő pont, ha a vizsgázó egyenlőtlenségekkel írja le jól a megfelelő intervallumokat.*
- 2. A megfelelő pontszámok akkor is járnak, ha a vizsgázó a függvény menetének leírását az alábbihoz hasonló táblázattal adja meg helyesen.*

$x$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$
$f'$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$f$	↑	maximum $f(-1) = 3,5$	↓	minimum $f(2) = -10$	↑

<b>4. b)</b>		
(A $g$ az $f$ -nek egyik primitív függvénye, ezért) $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 3x^2 + c$ ( $c \in \mathbf{R}$ ).	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem ír konstans tagot (<math>c</math>-t).</i>
Mivel $g(2) = 4 - 4 - 12 + c = 0$ ,	1 pont	
ezért $c = 12$ ,	1 pont	
és így $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 12$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

## II.

<b>5. a) első megoldás</b>		
$2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = 0$	1 pont	
(Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.) Látható, hogy $x = 0$ valóban gyök.	1 pont	
A többi gyököt a $2x^2 - 5x - 3 = 0$ egyenletből kaphatjuk.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ennek az egyenletnek a gyökei: $-\frac{1}{2}$ és $3$ , azaz a megadott három szám valóban gyök.	1 pont	
Másodfokú egyenletnek legfeljebb két (különböző valós) gyöke lehet, ezért nincs több gyök.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. a) második megoldás</b>		
$2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) =$	1 pont	
$= x(2x + 1)(x - 3) = 0$	2 pont	
A szorzat alakból látható, hogy a megadott számok mindegyike gyöke az egyenletnek.	1 pont	
Mivel egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért nincs több gyök.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. a) harmadik megoldás</b>		
A megadott értékek behelyettesítésével adódik, hogy azok valóban gyökei az egyenletnek.	3 pont	
Harmadfokú egyenletnek legfeljebb három (különböző valós) gyöke lehet, ezért nincs több gyök.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. b)</b>		
Legyen $y = \cos x$ . A $2y^3 - 5y^2 - 3y = 0$ egyenletnek három valós gyöke van (az a) feladat igaz állítása miatt): $y_1 = 0$ , $y_2 = -\frac{1}{2}$ és $y_3 = 3$ .	1 pont	
(Mivel $-1 \leq \cos x \leq 1$ , ezért) $y \neq 3$ .	1 pont	
A $\cos x = 0$ egyenlet megoldásai: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , ahol $k \in \mathbf{Z}$ .	2 pont	<i>Ha a vizsgázó a gyököket periódus nélkül radiánban, vagy periódussal együtt fokokban, vagy a periódussal együtt „vegyesen” adja meg, akkor ebből a 2-2 pontból legfeljebb 1-1 pontot kaphat.</i>
A $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$ , ahol $m \in \mathbf{Z}$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

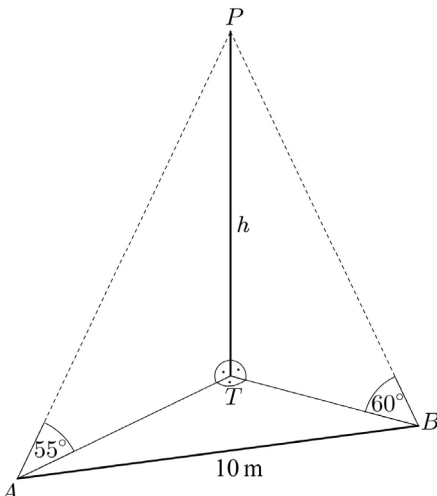
*Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem említi a  $k \in \mathbf{Z}$  és/vagy az  $m \in \mathbf{Z}$  feltételt, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

<b>5. c) első megoldás</b>		
Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
ezért $2 \cdot 8^x > 0$ , $7 \cdot 4^x > 0$ és $3 \cdot 2^x > 0$ (bármely valós $x$ esetén).	1 pont	
Az egyenlet bal oldalán álló összeg így (bármely valós $x$ esetén) pozitív,	2 pont	
tehát valóban nincs megoldása az egyenletnek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. c) második megoldás</b>		
Az egyenlet bal oldalán $2^x$ kiemelhető: $2^x \cdot (2 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x + 3) = 0$ .	1 pont	
(Mivel az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ezért) $2^x = 0$ nem lehetséges.	1 pont	
Ezek után a $2 \cdot (2^x)^2 + 7 \cdot 2^x + 3 = 0$ ( $2^x$ -ben másodfokú) egyenletet kell vizsgálnunk.	1 pont	
$2^x = -3$ vagy $2^x = -\frac{1}{2}$ .	1 pont	
(Az exponenciális függvény értékkészlete miatt) ezek egyike sem lehetséges, tehát valóban nincs megoldása az egyenletnek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	



<b>6. a)</b>		
A műszerek 7%-a hibásan méri a szöget, 5%-a pedig hibásan méri a távolságot.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Mivel a műszerek 2%-a mindkét adatot hibásan méri, ezért a hibás műszerek aránya: $5 + 7 - 2 = 10$ százalék.	1 pont	
Egy hibátlan műszer választásának valószínűsége tehát 0,9.	1 pont	
Akkor lesz köztük legfeljebb 2 hibás, ha a hibás műszerek száma 0, 1 vagy 2.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Annak a valószínűsége tehát, hogy a 20 kiválasztott műszer között legfeljebb 2 hibás lesz: $0,9^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,9^{19} \cdot 0,1 + \binom{20}{2} \cdot 0,9^{18} \cdot 0,1^2$ .	2 pont	<i>1 pont jár, ha a vizsgázó a binomiális együtthatókat leghagyja.</i>
A kért valószínűség közelítőleg ( $0,122 + 0,270 + 0,285 \approx$ ) 0,677.	1 pont	<i>Más, ésszerűen és helyesen kerekített vagy százaléklamban megadott érték is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>6. b)</b>		
 <p>(Jó ábra, amelyen a vizsgázó feltünteti a szövegnek megfelelő adatokat.)</p>	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
Az ATP háromszögből: $AT = \frac{h}{\operatorname{tg} 55^\circ} (\approx 0,700h)$ .	1 pont	
A BTP háromszögből: $BT = \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ} (\approx 0,577h)$ .	1 pont	<i>A szabályos háromszög tulajdonságai miatt</i> $BT = \frac{h}{\sqrt{3}}$ .

Az $ATB$ derékszögű háromszögből Pitagorasztétellel:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\frac{h^2}{\operatorname{tg}^2 55^\circ} + \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2 60^\circ} = 100,$	1 pont	
ebből $h \approx 11$ .	2 pont	
A fa magassága (a $TP$ távolság) körülbelül 11 méter.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

**7. a)**

Ha a sorozat második tagja $a_2$ , akkor (a számtani sorozat ismert tulajdonsága miatt) az első három tag átlaga (számtani közepe) is $a_2$ .	1 pont	
Ha a számtani sorozat differenciája $d$ , akkor a szórásnégyzet: $\frac{(a_2 - d - a_2)^2 + 0^2 + (a_2 + d - a_2)^2}{3} = 6.$	1 pont	
Ebből $d^2 = 9$ ,	1 pont	
azaz (mivel a sorozat növekedő) $d = 3$ (ezt kellett bizonyítanunk).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés:*

*Ha a vizsgázó behelyettesítéssel megmutatja, hogy bármely 3 differenciájú számtani sorozat esetén az első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6, de nem igazolja azt, hogy más (pozitív) differencia esetén nem ennyi, akkor 2 pontot kapjon.*

*Ha egy (vagy több) konkrét, 3 differenciájú számtani sorozatra látja be azt, hogy az első három tagból álló adathalmaz szórásnégyzete 6, akkor 1 pontot kapjon.*

**7. b)**

Ha Barbara $x$ éves, akkor Cili $x + 3$ éves, és így Dezső, Barbara és Edit életkora rendre $x - 6$ , $x$ , illetve $x + 12$ év.	1 pont	
(Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három szomszédos tagja, így) $(x - 6)(x + 12) = x^2.$	1 pont	
A zárójeleket felbontva: $x^2 + 6x - 72 = x^2,$	1 pont	
ahonnan $x = 12$ .	1 pont	
Ellenőrzés: Dezső, Barbara és Edit életkora 6, 12, illetve 24 év, ez a három szám pedig valóban egy mértani sorozat három szomszédos tagja.	1 pont	
András tehát 9 éves (mert 3 évvel fiatalabb Barbaránál).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>7. c) első megoldás</b>		
Komplementer eseménnyel dolgozunk: nem felelnek meg azok az esetek, amelyekben a három lány három egymás melletti széken ül.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A három egymás melletti széket négyféleképpen lehet kiválasztani a hat közül.	1 pont	<i>A három lányt egyetlen egységnek tekintve ez az egység és a három fiú <math>4!</math>-féleképpen helyezhető el.</i>
A három egymás melletti széken $3!$ -féleképpen foglalhat helyet a három lány, a megmaradt három helyen szintén $3!$ -féleképpen foglalhat helyet a három fiú.	1 pont	<i>Egy egységen belül a lányok <math>3!</math> különböző sorrendben ülhetnek.</i>
A nem megfelelő elhelyezkedések száma tehát: $4 \cdot 6 \cdot 6 (= 144)$ .	1 pont	<i>A nem megfelelő elhelyezkedések száma tehát <math>4! \cdot 3! (= 144)</math>.</i>
Hatan a hat egymás melletti székre $6! (= 720)$ -féleképpen ülhetnének le.	1 pont	
A megfelelő elhelyezkedések száma: $(6! - 4 \cdot 6 \cdot 6) = 576$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>7. c) második megoldás</b>		
Ha nincs két lány, aki egymás mellett ül, akkor a sorrend FLFLFL, LFLFLF, LFLFFL vagy LFFLFL lehet.	1 pont	
Ha két lány egymás mellett ül a sor bal szélén, akkor a sorrend LLFLFF, LLFFLF vagy LLFFFL lehet. Ugyanígy három lehetőség van, ha két lány a sor jobb szélén ül egymás mellett.	1 pont	
Ha két lány valahol a sor közepén ül egymás mellett, akkor a sorrend FLLFFL, FLLFLF, FFLLFL, LFLLFF, FLLLF vagy LFLLF lehet.	1 pont	
Tehát csak a nemeket tekintve 16 különböző lehetséges sorrend van.	1 pont	
Minden ilyen sorrendben belül a lányok és a fiúk is $3!$ -féleképpen helyezkedhetnek el.	1 pont	
Így a megfelelő elhelyezkedések száma: $16 \cdot 3! \cdot 3! = 576$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>8. a) első megoldás</b>		
Legyen $A(0; a)$ és $B(b; 0)$ (de $a^2 + b^2 \neq 0$ ).	1 pont	
Ekkor az $AB$ szakasz felezőpontja $F\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}\right)$ .	1 pont	
Ekkor $\vec{FB}\left(\frac{b}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ .	1 pont	
Ha a négyzet középpontja a $K$ pont, akkor $\vec{FK}$ az $\vec{FB}$ $+90^\circ$ -os vagy $-90^\circ$ -os elforgatottja, tehát	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\vec{FK}\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ vagy $\vec{FK}\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ .	1 pont	
Az $F$ pont helyvektorát jelölje $\mathbf{f}$ , ekkor a $K$ pont helyvektora $\mathbf{k} = \mathbf{f} + \vec{FK}$ , azaz $\mathbf{k}\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ vagy	1 pont	
$\mathbf{k}\left(\frac{b-a}{2}; \frac{a-b}{2}\right)$ .	1 pont	
Tehát a $K$ középpont koordinátái valóban vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>8. a) második megoldás</b>		
Legyen pl. $A(0; a)$ és $B(b; 0)$ (de $a^2 + b^2 \neq 0$ ).	1 pont	
Ekkor $\vec{AB}(b; -a)$ ,	1 pont	
$\vec{BC}$ pedig az $\vec{AB}$ -nak $+90^\circ$ -os vagy $-90^\circ$ -os elforgatottja.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Tehát $\vec{BC}(a; b)$ vagy $\vec{BC}(-a; -b)$ .	1 pont	
A $B$ csúcs helyvektorát jelölje $\mathbf{b}$ , ekkor a $C$ csúcs helyvektora $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \vec{BC}$ , azaz $\mathbf{c}(a+b; b)$ vagy	1 pont	
$\mathbf{c}(b-a; -b)$ .	1 pont	
$K$ az $AC$ szakasz felezőpontja, ezért $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ vagy $K\left(\frac{b-a}{2}; \frac{a-b}{2}\right)$ .	1 pont	
Tehát a $K$ középpont koordinátái valóban vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>8. a) harmadik megoldás</b>		
(A négyzet(ek) középpontja(i) az $AB$ átmérőjű kör és az $AB$ szakasz felezőmerőlegesének metszéspontjaként adódnak.) Az $AB$ átmérőjű kör egyenlete: $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$	1 pont	
$AB$ felezőmerőlegesének egyenlete: $bx - ay = \frac{b^2 - a^2}{2}.$	1 pont	
A második egyenletből: $y = \frac{2bx + a^2 - b^2}{2a}.$	1 pont	
Behelyettesítve a kör egyenletébe: $x^2 - bx + \frac{b^2}{4} + \left(\frac{2bx - b^2}{2a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4},$ majd egyszerűbb alakra hozva: $4x^2 - 4bx + b^2 - a^2 = 0.$	2 pont	
Megoldások: $x_1 = \frac{b-a}{2}, x_2 = \frac{b+a}{2}.$	1 pont	
Visszahelyettesítés után kapjuk: $y_1 = \frac{a-b}{2}, y_2 = \frac{a+b}{2}.$	1 pont	
$x_1 = -y_1$ és $x_2 = y_2$ , azaz valóban teljesül az állítás.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzések:*

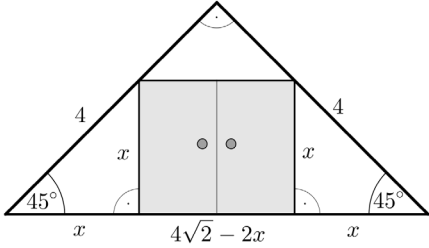
*Ha a vizsgázó egy (vagy több) konkrét négyzet koordinátaival végzi el a számításokat, akkor ezért legfeljebb 4 pontot kaphat.*

*Ha számítások nélkül, egy ábráról olvassa le egy (vagy több) konkrét négyzet középpontjának koordinátáit, akkor ezért legfeljebb 1 pontot kaphat.*

<b>8. b) első megoldás</b>		
A négyzet körülírt körének sugara az átló fele, azaz $5\sqrt{2}$ .	1 pont	
A körülírt kör egyenlete: $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 50$ .	1 pont	
A kör $y$ tengelyen lévő pontjait az $x = 0$ helyettesítéssel, az $x$ tengelyen lévő pontjait az $y = 0$ helyettesítéssel adódó egyenlet adja meg.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A kapott két egyenlet $(y - 7)^2 = 1$ , illetve $(x - 7)^2 = 1$ .	1 pont	
Ezeknek a megoldásai $y_1 = 6$ és $y_2 = 8$ , illetve $x_1 = 6$ és $x_2 = 8$ .	1 pont	
Tehát a tengelyeken négy pont lehet a négyzet valamelyik csúcsa: a $(0; 6)$ , a $(0; 8)$ , a $(6; 0)$ és a $(8; 0)$ pontok.	1 pont	
(Figyelembe véve, hogy két szomszédos csúcs távolsága 10 egység) két megoldás adódik: $A_1(0; 6)$ és $B_1(8; 0)$ , illetve $A_2(0; 8)$ és $B_2(6; 0)$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>8. b) második megoldás</b>		
Ha a négyzet két csúcsa $A(0; a)$ és $B(b; 0)$ , akkor a négyzet oldalhossza $\sqrt{a^2 + b^2}$ .	1 pont	
Mivel (az a) feladat szerint) a négyzet középpontja $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ , ezért megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{2} = 7 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{array} \right\}$	2 pont	
Az első egyenletből: $a = 14 - b$ , ezt a másodikba helyettesítve: $\sqrt{(14 - b)^2 + b^2} = 10$ .	1 pont	
Rendezve: $b^2 - 14b + 48 = 0$ .	1 pont	
Ennek megoldásai $b_1 = 6$ és $b_2 = 8$ .	1 pont	
$a_1 = 8$ és $a_2 = 6$ .	1 pont	
Tehát két ilyen négyzet van, a kérdéses csúcsok: $A_1(0; 6)$ és $B_1(8; 0)$ , illetve $A_2(0; 8)$ és $B_2(6; 0)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy ábráról helyesen leolvassa a feladat megoldásait, akkor ezért 2 pontot kapjon. Ha a talált megoldásokról megmutatja, hogy azok valóban megfelelnek a feladat feltételeinek, akkor ezért további 2 pont jár. Ha azt is megmutatja, hogy más megoldása nem lehet a feladatnak, akkor maximális pontszámot kaphat.*

<b>9. a)</b>		
 <p>(Használjuk az ábra jelöléseit!) Ha a szekrény magassága <math>x</math> méter, akkor szélessége (az ábrán látható egyenlő szárú derékszögű háromszögek miatt) <math>4\sqrt{2} - 2x</math> (m), a térfogata pedig <math>V(x) = 0,6x(4\sqrt{2} - 2x)</math> (<math>m^3</math>) (<math>0 &lt; x &lt; 2\sqrt{2}</math>).</p>	2 pont	
Az $x \mapsto 0,6x(4\sqrt{2} - 2x)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$ ,	1 pont*	
így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél,	1 pont*	<i>Ez a pont jár más helyes indoklásért (pl. egy jó ábráért) is.</i>
az $x = \sqrt{2}$ helyen lesz.	1 pont*	
(Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért) a legnagyobb térfogatú szekrény magassága $\sqrt{2} \approx 1,41$ méter,	1 pont	
szélessége pedig $2\sqrt{2} \approx 2,83$ méter lesz.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzések:*

- 1. A vizsgázó akkor is maximális pontszámot kaphat, ha megállapítja, hogy a téglatest egyik oldala rögzített, ezért elegendő csak a szekrény előlapjának területével foglalkoznia.*
- 2. Ha a vizsgázó válaszában nem szerepel mértékegység, akkor ezért összesen 1 pontot veszít sen.*
- 3. A \*-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az $x \mapsto 0,6x(4\sqrt{2} - 2x)$ másodfokú függvény deriváltfüggvénye: $x \mapsto 2,4\sqrt{2} - 2,4x$ .	1 pont	
A deriváltfüggvény zérushelye az $x = \sqrt{2}$ ,	1 pont	
itt a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, ezért ez az eredeti függvénynek maximumhelye.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha a vizsgázó a második derivált előjelével indokol helyesen.</i>

<b>9. b) első megoldás</b>		
(Az azonos színű ingeket megkülönböztetve) az első három napon $7 \cdot 6 \cdot 5$ ( $= 210$ ) különböző (egyenlően valószínű) lehetőség van a három ing kiválasztására.	1 pont	
Kedvező esemény az, ha (valamilyen sorrendben) mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Egy adott színsorrendben (például fehér-kék-sárga) $2 \cdot 2 \cdot 3$ különböző módon lehet három inget kiválasztani.	1 pont	
Három adott szín sorrendje $3!$ -féle lehet,	1 pont	
tehát három különböző színű inget $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3!$ különböző módon választhat ki Kovács úr.	1 pont	
A három sárga inget $3!$ különböző sorrendben választhatja ki.	1 pont	
A kedvező esetek száma $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! + 3!$ ( $= 78$ ).	1 pont	
A kért valószínűség tehát: $\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! + 3!}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{78}{210} = \frac{13}{35}$ ( $\approx 0,371$ ).	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>9. b) második megoldás</b>		
Ha csak az ingek színeit tekintjük, akkor a színeket $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 210$ -féleképpen lehet sorba rendezni (és e sorrendek mindegyike ugyanakkora valószínűségű).	1 pont	<i>A 7 ing helyett a színeket rendezzük sorba: 2 fehéret, 2 világoskékét és 3 sárgát.</i>
Ezek közül a kedvező sorrendek azok, melyekben vagy három különböző szín vagy 3 sárga van az első három helyen.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Három különböző szín $3! = 6$ -féleképpen adható meg az első három helyre.	1 pont	
Ekkor a maradék négy helyre az 1 fehér, 1 világoskék és 2 sárga szín $\frac{4!}{2!} = 12$ különböző sorrendben adható meg.	1 pont	
Ez $6 \cdot 12 = 72$ olyan lehetőség, amelyben az első három helyen három különböző szín áll.	1 pont	
Ha az első három helyen sárga szín áll, akkor a maradék 4 helyre a 2 fehér és 2 világoskék szín $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ különböző sorrendben adható meg.	1 pont	
A kedvező esetek száma összesen $72 + 6 = 78$ .	1 pont	
A kért valószínűség tehát: $\frac{78}{210} = \frac{13}{35}$ ( $\approx 0,371$ ).	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	



<b>9. b) harmadik megoldás</b>		
Megfelelők azok az esetek, amelyekben Kovács úr az első három napon különböző színű ingeket viselt, illetve amelyekben az első három napon sárga inget viselt.	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
Az ingek színének kiválasztása egymástól függetlenül történik, tehát alkalmazható a valószínűségek szorzási szabálya.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a három különböző színű ing közül például az első sárga, a második fehér, a harmadik világoskék: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \left( = \frac{2}{35} \right)$ .	1 pont	
Ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy a három különböző színű ing sorrendje sárga-világoskék-fehér.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a három különböző színű ing közül a sárga a második, illetve a harmadik, szintén egyformán $\frac{4}{35}$ .	1 pont	
Tehát annak valószínűsége, hogy az első három napon három különböző színű inget választ Kovács úr: $3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{35}$ .	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az első három napon sárga inget választ Kovács úr: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \left( = \frac{1}{35} \right)$ .	1 pont	
A kért valószínűség tehát: $\frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35} (\approx 0,371)$ .	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	