ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

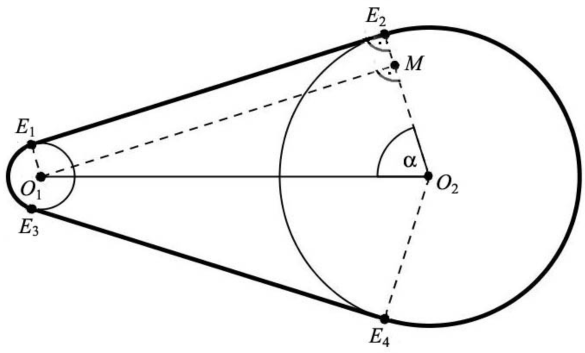
I.

1.

Egy tört nempozitív, ha vagy a számlálója és nevezője ellentétes előjelű, vagy a számlálója nulla, de a nevezője nem.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Első eset: $x - 3 > 0$ és $x + 4 \leq 0$. Ebből: $x > 3$ és $x \leq -4$. Ebben az esetben nem kapunk megoldást.	1 pont	
Második eset: $x - 3 < 0$ és $x + 4 \geq 0$. Ebből: $x < 3$ és $x \geq -4$.	1 pont	
Ezért az A halmaz elemei: $\{-4; -3; -2; -1; 0, 1; 2\}$.	1 pont	
Ez az abszolútértékes egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-4 < x + 3 < 4$,	2 pont	
azaz $-7 < x < 1$.	1 pont	
Ezért a B halmaz elemei: $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.	1 pont	
$A \cap B = \{-4, -3; -2; -1; 0\}$.	1 pont	
$A \setminus B = \{1; 2\}$.	1 pont	
$A \cup B = \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

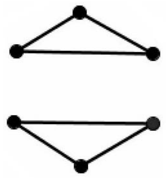
Megjegyzés: Ha a vizsgázó az egyenlőtlenségeknek egész helyett a valós megoldásaival dolgozik, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.

2.

 Jó ábra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen modellezi és számolja ki a hajtószíj hosszát.*
A keresett hajtószíjhossz az egymással egyenlő hosszú E_1E_2 és E_3E_4 érintőszakaszokból, valamint a (rövidebb) E_1E_3 körívből és a (hosszabb) E_2E_4 körívből áll.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Az O_1-en keresztül az E_1E_2 érintőszakasszal húzott párhuzamos metszéspontja O_2E_2-vel legyen M.	1 pont	
Az O_1MO_2 derékszögű háromszögből $E_1E_2 = O_1M = \sqrt{46^2 - 19^2} = \sqrt{1755} \approx 41{,}9$ (cm).	1 pont	
(Az O_1O_2M szöget α-val jelölve:) $\cos\alpha = \frac{19}{46}$ ($\approx 0{,}4130$),	1 pont	

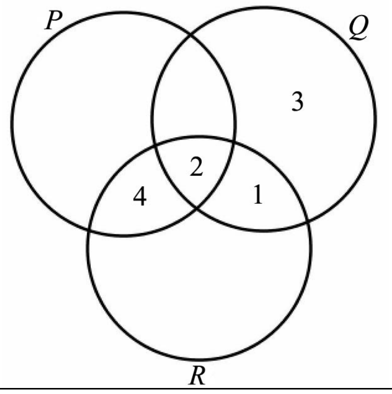
ahonnan $\alpha \approx 65{,}6°$.	1 pont	
A hosszabb E_2E_4 körívhez tartozó középponti szög $360° - 2\alpha \approx 228{,}8°$.	1 pont	
A hosszabb E_2E_4 körív hossza így $\frac{228{,}8°}{360°} \cdot 2 \cdot 20\pi \approx$	1 pont	
$\approx 79{,}9$ (cm).	1 pont	
A rövidebb E_1E_3 körívhez tartozó középponti szög $2\alpha \approx 131{,}2°$.	1 pont	
A rövidebb E_1E_3 körív hossza így $\frac{131{,}2°}{360°} \cdot 2 \cdot 1\pi \approx$	1 pont	
$\approx 2{,}3$ (cm).	1 pont	
Innen a feszes hajtószíj hossza megközelítőleg $2 \cdot 41{,}9 + 79{,}9 + 2{,}3 = 166$ cm.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

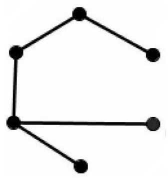
3. a)

Az állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen jó ellenpélda (nem összefüggő, egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma legalább 2), például: 	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3. b)

Az állítás megfordítása: *Ha a gráf összefüggő, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2.*	2 pont	
Az állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen jó ellenpélda (összefüggő, egyszerű gráf, amelynek van elsőfokú pontja), például: 	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c)		
	1-1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. d)		
Bármilyen jó 6 pontú fa, például: 	2 pont	
Az 5-ös sorszám elhelyezése a $(P \cap Q) \setminus R$ halmazba.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a) első megoldás		
A március 1-jén felvett hitel (365 − 31 − 28 =) 306 napig, az október 1-jén felvett hitel pedig (31 + 30 + 31 =) 92 napig kamatozik.	1 pont	
A napi kamatláb $\frac{8}{365}$%.	1 pont	
Az első hitel kamata $40\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 306$ (≈ 2683) (Ft),	1 pont	
a második hitel kamata pedig $40\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 92$ (≈ 807) (Ft).	1 pont	
Összesen (2683 + 807 =) 3490 Ft kamatot tőkésít a bank december 31-én.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) második megoldás		
Március 1-től szeptember 30-ig, azaz (31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 =) 214 napig 40 000 Ft hitel után, október 1-től december 31-ig, azaz (31 + 30 + 31 =) 92 napig pedig 80 000 Ft hitel után számít fel a bank kamatot.	1 pont	
A napi kamatláb $\frac{8}{365}$%.	1 pont	
Az első periódusban $40\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 214$ (≈ 1876) (Ft),	1 pont	
a második periódusban pedig $80\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 92$ (≈ 1613) (Ft) kamatot számít fel a bank.	1 pont	
Összesen (1876 + 1613 =) 3489 Ft kamatot tőkésít a bank december 31-én.	1 pont	*3490 Ft is elfogadható (az eltérés a kerekítésekből adódik).*
Összesen:	**5 pont**	

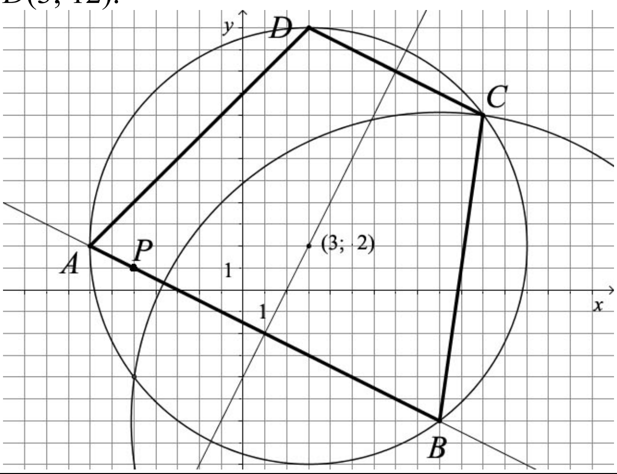
Megjegyzés: Más, ésszerű és helyes kerekítésekkel – például ha a vizsgázó a napi kamatlábat 0,02%-nak vagy 0,022%-nak veszi – kapott eredmények is elfogadhatók. Rossz vagy ésszerűtlen kerekítés(ek) esetén a vizsgázó ezért összesen 1 pontot veszítsen.

4. b)		
(Ha x Ft volt az évi törlesztőrészlet, akkor) $(...((1\,000\,000\underbrace{\cdot 1{,}08 - x)\cdot 1{,}08 - x)\cdot ...)\cdot 1{,}08 - x}_{10\text{–szer}} = 0$.	2 pont	
Rendezve: $1\,000\,000 \cdot 1{,}08^{10} - x \cdot (1{,}08^{9} + 1{,}08^{8} + ... + 1) = 0$.	2 pont	
A zárójelben egy mértani sorozat első 10 tagjának összege van ($a_1 = 1$, $q = 1{,}08$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$S_{10} = \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1}$ (≈ 14,487)	1 pont	
Az egyenletből: $x = \frac{1\,000\,000 \cdot 1{,}08^{10}}{S_{10}} \approx \left(\frac{2\,158\,925}{14{,}487} \approx\right)$	1 pont	
≈ 149 025.	1 pont	
Tehát (ezresekre kerekítve) 149 000 Ft az éves törlesztőrészlet.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a függvénytáblázatban található megfelelő képletbe jól helyettesít és így határozza meg az éves törlesztőrészletet, akkor maximális pontszámot kapjon.

II.

5. első megoldás		
(A szimmetriatengely egy normálvektora a (2; –1) vektor, így) a trapéz alapjának egy normálvektora az (1; 2) vektor.	1 pont	
A $P(-5; 1)$ ponton áthaladó AB alap egyenesének egyenlete $x + 2y = -3$.	1 pont	
Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait, tehát a trapéz két csúcsának koordinátáit az $\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2&=100\\ x+2y&=-3\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják.	1 pont	
Az $x = -2y - 3$ kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az $y^2 + 4y - 12 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont	
Ennek megoldásai $y = 2$ és $y = -6$, így a trapéz AB alapjának két végpontja $A(-7; 2)$ és $B(9; -6)$.	1 pont	
A B középpontú és $10\sqrt{2}$ sugarú kör egyenlete $(x-9)^2+(y+6)^2=200$.	1 pont	
Ennek és a trapéz köré írható körnek (az egyik) metszéspontját, tehát a C csúcs koordinátáit az $\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2&=100\\ (x-9)^2+(y+6)^2&=200\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer (valamelyik) megoldása adja.	1 pont*	
A műveletek elvégzése és a két egyenlet kivonása után x-et kifejezve y-nal: $x=\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}$.	2 pont*	$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$
Ezt visszahelyettesítve valamelyik kör egyenletébe, majd egyszerűsítve az $y^2 - 4y - 32 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont*	$x^2 - 6x - 55 = 0$
Ennek megoldásai $y = 8$ és $y = -4$, így a metszéspontok koordinátái (11; 8) és (–5; –4).	1 pont*	$x = 11$ és $x = -5$
(A (–5; –4) pont a trapéz szimmetriatengelyének B-vel ellentétes oldalán van, így nem lehet a BC szár másik végpontja, tehát) $C(11; 8)$.	1 pont	
A CD alap egyik normálvektora szintén az (1; 2) vektor, valamint áthalad a $C(11; 8)$ csúcson, így egyenlete $x + 2y = 27$.	1 pont	
Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait az $\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2&=100\\ x+2y&=27\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják.	1 pont	

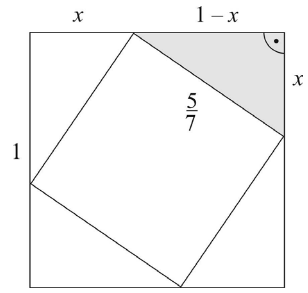
Az $x = 27 - 2y$ kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az $y^2 - 20y + 96 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont	
Ennek megoldásai $y = 12$ és $y = 8$. A (11; 8) pontot már korábban megkaptuk, így a negyedik csúcs $D(3; 12)$. 	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

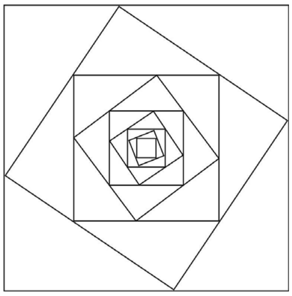
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az A középpontú és* $10\sqrt{2}$ *sugarú kör felírásával és így a* $\left.\begin{array}{r}(x-3)^2+(y-2)^2=100\\(x+7)^2+(y-2)^2=200\end{array}\right\}$ *egyenletrendszer megoldásával először a D csúcs koordinátáit határozza meg.*

5. második megoldás		
(A szimmetriatengely egy normálvektora a (2; –1) vektor, így) a trapéz alapjának egy normálvektora az (1; 2) vektor.	1 pont	
A $P(-5; 1)$ ponton áthaladó AB alap egyenlete $x + 2y = -3$.	1 pont	
Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait, tehát a trapéz két csúcsának koordinátáit az $\left.\begin{array}{r}(x-3)^2+(y-2)^2=100\\x+2y=-3\end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják.	1 pont	
Az $x = -2y - 3$ kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az $y^2 + 4y - 12 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont	
Ennek megoldásai $y = 2$ és $y = -6$, így a trapéz AB alapjának két végpontja $A(-7; 2)$ és $B(9; -6)$.	1 pont	
Jelölje a trapéz köré írt kör középpontját K. Mivel a kör sugara 10 egység, a trapéz szárai pedig $10\sqrt{2}$ egység hosszúak, (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) az AKD és a CKB háromszögek derékszögűek.	2 pont	

Ezért a $\overrightarrow{KA}$(–10; 0) vektor 90°-os elforgatottja a $\overrightarrow{KD}$ vektor, a $\overrightarrow{KB}$ (6; –8) vektor 90°-os elforgatottja pedig a $\overrightarrow{KC}$ vektor.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezért vagy $\overrightarrow{KD}$(0; 10) vagy $\overrightarrow{KD}$(0; –10),	2 pont	
azaz vagy D(3; 12) vagy D(3; –8).	1 pont	
(A (3; –8) pont a trapéz szimmetriatengelyének A-val ellentétes oldalán van, így nem lehet az AD szár másik végpontja, tehát) D(3; 12).	1 pont	
Hasonlóan vagy $\overrightarrow{KC}$ (8; 6) vagy $\overrightarrow{KC}$ (–8; –6),	2 pont	
azaz vagy C(11; 8) vagy C(–5; –4).	1 pont	
(A (–5; –4) pont a trapéz szimmetriatengelyének B-vel ellentétes oldalán van, így nem lehet a BC szár másik végpontja, tehát) C(11; 8).	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a $\overrightarrow{KA}$ és $\overrightarrow{KB}$ vektorok két-két lehetséges 90°-os elforgatottja közül csak az egyik lehetőséggel foglalkozik, akkor ezért összesen 2 pontot veszítsen.

6. a)		
	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A belső négyzet oldala $\frac{5}{7}$ méter.	1 pont	
A belső négyzet a külső négyzet oldalait x és $1-x$ hosszú szakaszokra bontja.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
(A 90°-os forgásszimmetria miatt) ez a felosztás mind a négy oldalon megismétlődik.	1 pont	
(A Pitagorasz-tételt alkalmazva) $x^2+(1-x)^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2$,	1 pont	
ahonnan $2x^2-2x+\frac{24}{49}=0$.	1 pont	
Ennek megoldásai $x_1=\frac{4}{7}$ és $x_2=\frac{3}{7}$,	2 pont	
ahonnan $1-x_1=\frac{3}{7}$ és $1-x_2=\frac{4}{7}$.	1 pont	
A belső négyzet a külső négyzet oldalait 3:4 (vagy 4:3) arányban osztja.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

6. b) **első megoldás**		
1 		
$K_1 = 4$ (m), $K_2 = 4 \cdot \frac{5}{7}$ (m), és (hasonlósági megfontolások miatt) minden további négyzet kerülete $\frac{5}{7}$-szerese a megelőzőnek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A négyzetek kerületének összege egy végtelen mértani sor összege, melynek hányadosa $q = \frac{5}{7}$.	1 pont	
Mivel $\lvert q \rvert < 1$, ezért a sor konvergens.	1 pont	
A végtelen mértani sor összege: $S = K_1 + K_2 + ... = K_1 \cdot \frac{1}{1-q} =$	1 pont	
$= \frac{4}{1-\frac{5}{7}} = 14$.	1 pont	
Tehát a négyzetek kerületének összege 14 méter.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b) második megoldás		
$K_1 = 4$ (m), $K_2 = 4\cdot\frac{5}{7}$ (m), és (hasonlósági megfontolások miatt) minden további négyzet kerülete $\frac{5}{7}$-szerese a megelőzőének.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A négyzetek kerülete egy olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja $a_1 = 4$, hányadosa $q = \frac{5}{7}$.	1 pont	
A mértani sorozat első n tagjának összege: $S_n = 4\cdot\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\frac{5}{7} - 1}$.	1 pont	
Mivel $\left(\frac{5}{7}\right)^n \to 0$, ha $n \to \infty$,	1 pont	
ezért $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 4\cdot\frac{0-1}{\frac{5}{7}-1} = 14$.	1 pont	
Tehát a négyzetek kerületének összege 14 méter.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

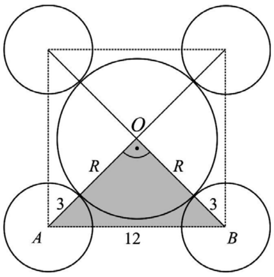
7. a)		
(Ha r a doboz alapkörének sugara, m pedig a doboz magassága cm-ben mérve, akkor) $V = r^2\pi m$, ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{1000}{r^2\pi}$ (cm).	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó részletezés nélkül írja fel helyesen a teljes anyagköltséget.*
Az alap- és a fedőlap együttes anyagköltsége r függvényében $0{,}2\cdot 2r^2\pi$ (Ft).	1 pont	
A palást anyagköltsége r függvényében $0{,}1\cdot 2r\pi\cdot\frac{V}{r^2\pi} = \frac{0{,}2V}{r} = \frac{200}{r}$ (Ft).	2 pont	
A teljes anyagköltség r függvényében ($r > 0$) $f(r) = 0{,}4r^2\pi + \frac{200}{r}$ (Ft).	1 pont	

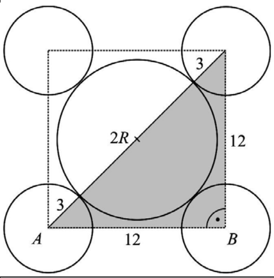
Az f függvénynek a pozitív számok halmazán ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(r) = 0{,}8r\pi - \frac{200}{r^2}$	2 pont*	
$f'(r) = 0$, ha $r\left(= \sqrt[3]{\frac{200}{0{,}8\pi}}\right) \approx 4{,}3$ cm.	1 pont*	
Mivel $f''(r) = 0{,}8\pi + \frac{400}{r^3} > 0$, ezért itt valóban minimális f értéke.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.*
A minimális anyagköltséghez tartozó magasság $m\left(= \frac{1000}{r^2\pi}\right) \approx 17{,}2$ cm.	1 pont	
A minimális anyagköltség forintra kerekítve 70 Ft.	2 pont	
Összesen:	**13 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó válaszaiban nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.
2. Ha a vizsgázó válaszaiban nem ad meg mértékegységet, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.
*3. A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával: $f(r) = 0{,}4r^2\pi + \frac{200}{r} = 0{,}4\pi\cdot r^2 + \frac{100}{r} + \frac{100}{r} \geq$ $\geq 3\cdot\sqrt[3]{0{,}4\pi\cdot r^2\cdot\frac{100^2}{r^2}} = 3\cdot\sqrt[3]{4000\pi}$.	3 pont	
Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $0{,}4\pi\cdot r^2 = \frac{100}{r}$,	1 pont	
ahonnan $r\left(= \sqrt[3]{\frac{100}{0{,}4\pi}}\right) \approx 4{,}3$ cm.	1 pont	

7. b)		
Az adatok átlaga 0,7.	1 pont	
A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése $\frac{6\cdot 0{,}7 + 2\cdot 0{,}3 + 1{,}3 + 2{,}3}{10} = 0{,}84$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. a) első megoldás		
 Jó ábra: az érintkező hengerek egy alkalmas síkmetszetének ábrázolása.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A nagy kör középpontját a négy kis kör középpontjával összekötő négy szakasz által meghatározott szögek (az ábra forgásszimmetriája miatt) derékszögek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a derékszöget az ábráján tüntette fel.*
(A Pitagorasz-tételt alkalmazva pl. az OAB háromszögben:) $(3+R)^2+(3+R)^2=12^2$ (= 144).	1 pont	
(Mivel 3 + R > 0, ezért) $3+R=\sqrt{72}\left(=6\sqrt{2}\right)$,	1 pont	$2R^2+12R-126=0$ *$R_1 \approx 5{,}485$; R_2 negatív.*
ebből (a kért pontossággal) $d = 2R = (12\sqrt{2} - 6 \approx)$ 10,97 mm.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

8. a) második megoldás		
 Jó ábra: az érintkező hengerek egy alkalmas síkmetszetének ábrázolása.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A négy kis kör középpontja egy 12 mm oldalú négyzetet alkot.	1 pont	
Ennek a négyzetnek az átlója $12\sqrt{2}$ (mm).	1 pont	
Mivel ez éppen $2R + 6$,	1 pont	
ebből (a kért pontossággal) $d = 2R = (12\sqrt{2} - 6 \approx)$ 10,97 mm.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

8. b) első megoldás		
A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Ha a piros elemek száma k, akkor (mivel a piros elemek helye a toronyban már egyértelműen meghatározza a tornyot) az építhető tornyok száma $\binom{8}{k}$.	1 pont	

Így az ilyen tornyok száma összesen $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$= (56 + 28 + 8 + 1 =)	1 pont	
= 93.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Szimmetria okokból azon tornyok száma, amelyek több piros elemet tartalmaznak, megegyezik azon tornyok számával, amelyek több kéket.	1 pont	
Ugyanannyi (4-4) piros és kék elemet tartalmaz $\binom{8}{4}$(= 70) torony.	1 pont	
(Mivel a torony minden eleme kétféle lehet,) az összes lehetséges különböző tornyok száma 2^8 (= 256).	1 pont	
A megfelelő tornyok száma tehát $\frac{256-70}{2}=93$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: A megfelelő pontok járnak, ha a vizsgázó kombináció helyett ismétléses permutációra hivatkozik.

8. c)		
Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes, $\frac{1000000-20}{1000000}=0{,}99998$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egy n kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes, $0{,}99998^n$.	1 pont	
Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes, kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megoldandó a $0{,}99998^n \geq 0{,}99$ egyenlőtlenség ($n \in \mathbf{N}$).	1 pont	
(Az lg x függvény szigorúan monoton növekedése miatt) $n \cdot \lg 0{,}99998 \geq \lg 0{,}99$.	1 pont	
Ebből ($\lg 0{,}99998 < 0$ miatt) $n \leq \frac{\lg 0{,}99}{\lg 0{,}99998} \approx 502{,}5$.	1 pont	
tehát András legfeljebb 502 darabos készletet vehet.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat (egyenlet felírása 3 pont, jó megoldása 1 pont, jó válasz 1 pont).

9. a)		
Az összes kihúzási lehetőségek száma $\binom{17}{3}(=680)$.	1 pont	
Három sárga golyót $\binom{8}{3}(=56)$-féleképpen, három zöld golyót $\binom{9}{3}(=84)$-féleképpen húzhatunk ki,	1 pont	
a kedvező esetek száma így $\binom{8}{3}+\binom{9}{3}(=140)$.	1 pont	
A keresett valószínűség $p=\dfrac{\binom{8}{3}+\binom{9}{3}}{\binom{17}{3}}=\dfrac{7}{34}\approx 0{,}206$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) első megoldás		
Sárga golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{8}{17}$, zöld golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{9}{17}$.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A kérdéses valószínűség binomiális eloszlást követ,	1 pont	
ezért $p=\binom{5}{3}\cdot\left(\dfrac{8}{17}\right)^3\cdot\left(\dfrac{9}{17}\right)^2\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}292$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) második megoldás		
(Mivel minden egyes húzás alkalmával mind a 17 golyót húzhatjuk, ezért) az összes esetek száma 17^5.	1 pont	
Mivel három sárga golyó húzására 8^3, két zöld golyó húzására 9^2 lehetőségünk van, a golyók kihúzásának színsorrendje pedig $\binom{5}{3}$-féle lehet,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a kedvező esetek száma $\binom{5}{3}\cdot 8^3\cdot 9^2$.	1 pont	
A keresett valószínűség $p=\dfrac{\binom{5}{3}\cdot 8^3\cdot 9^2}{17^5}\approx 0{,}292$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c)		
A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
vagy 3-as maradékaik páronként különbözők.	1 pont	
0 maradékot a 3, 6, 9, 12, 15 számok adnak, közülük három szám húzása $\binom{5}{3}(=10)$-féleképpen lehetséges.	1 pont	
1 maradékot az 1, 4, 7, 10, 13, 16 számok adnak, közülük három szám húzása $\binom{6}{3}(=20)$-féleképpen lehetséges.	1 pont	
2 maradékot a 2, 5, 8, 11, 14, 17 számok adnak, közülük három szám húzása $\binom{6}{3}(=20)$-féleképpen lehetséges.	1 pont	
A páronként különböző maradékot adó húzások száma $5\cdot 6^2(=180)$.	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{5}{3}+2\cdot\binom{6}{3}+5\cdot 6^2(=230)$.	1 pont	
Mivel az összes esetek száma $\binom{17}{3}(=680)$, ezért a keresett valószínűség $p=\frac{230}{680}\approx 0{,}338$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a teljes feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

2. Százalékban megadott helyes válaszok is elfogadhatók.

3. Ha a vizsgázó megoldásában rossz modellt használ (a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavételt felcseréli), akkor az a) és b) feladatokban 0 pontot, a c) feladatban legfeljebb 4 pontot kaphat.