

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. október 15.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésztre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

## I.

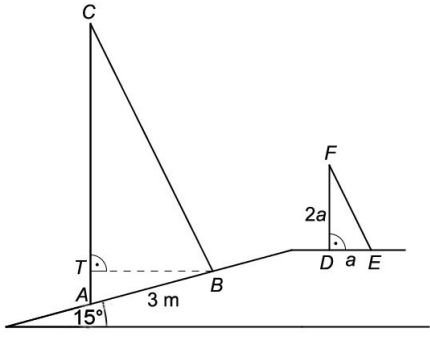
<b>1. a) első megoldás</b>		
(A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt:) $x \in [-2; 0]$ .	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem adja meg az ismeretlen lehetséges értékeit, de a gyökök helyességét behelyettesítéssel vizsgálja, akkor ez a pont jár.</i>
Négyzetre emelés után: $x + 2 = x^2$ .	1 pont	
Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és $-1$ .	1 pont	
Közülük csak a $-1$ eleme a fenti intervallumnak (és az átalakítások ezen az intervallumon ekvivalensek), ezért ez az egyetlen megoldás.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>1. a) második megoldás</b>		
Az $x \mapsto \sqrt{x+2}$ ( $x \geq -2$ ), és az $x \mapsto -x$ függvények ábrázolása közös koordináta-rendszerben.	1-1 pont	<i>Ha a vizsgázó ábrázolás nélkül a függvények szigorú monotonitására hivatkozik, akkor ez a 2 pont jár.</i>
A metszéspontjuk első koordinátája $x = -1$ .	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>1. b)</b>		
Közös alapra hozva a két oldalt: $4^{(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$ .	1 pont	
(Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $(x-1) \cdot (x+4) = \frac{x-1}{x+4}$ .	1 pont	
Ebből $x_1 = 1$ vagy	2 pont	
$(x+4)^2 = 1$ .	1 pont	<i>A négyzetre emelés után az <math>x^2 + 8x + 15 = 0</math> egyenletet kapjuk.</i>
Ebből $x_2 = -3$ vagy $x_3 = -5$ .	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az  $x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$  egyenlethez jut, ebből megkapja a gyököket és azokat ellenőrzi, akkor maximális pontszámot kaphat.*

<b>2. első megoldás</b>		
<p>A szövegnek megfelelő, az adatokat helyesen feltüntető ábra.</p>	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a különböző rajzokon vagy rajz nélkül, de az itt feltüntetett összefüggéseket helyesen használja.</i>
<p>Az <math>ACB</math> és <math>DFE</math> szögek egyenlők (mivel mindkettő a napsugarak és a függőleges által bezárt szög).</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szögek egyenlőségét az ábrán jelöli.</i>
<p>A <math>DEF</math> derékszögű háromszögben:</p> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$	2 pont	
$\alpha \approx 26,57^\circ$	1 pont	
$BAC$ szög ( $90^\circ - 15^\circ =$ ) $75^\circ$ .	1 pont	
Így $\beta \approx 78,43^\circ$ .	1 pont	
<p>(Szinusztétel az <math>ABC</math> háromszögben:)</p> $\frac{\sin 78,43^\circ}{\sin 26,57^\circ} = \frac{x}{3}.$	2 pont	
$x \approx 6,57$	1 pont	
<p>A fa tehát körülbelül 6,6 méter magas.</p>	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ez a pont nem jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

<b>2. második megoldás</b>		
<p>Bontsuk fel az <math>ABC</math> háromszöget egy vízszintes szakasszal két derékszögű háromszögre (<math>ABT</math> és <math>CTB</math> háromszögek).</p> 	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a különböző rajzokon vagy rajz nélkül, de az itt feltüntetett összefüggéseket helyesen használja.</i>
Az $ABT$ szög szintén $15^\circ$ .	1 pont	
(Az $ABT$ derékszögű háromszögben:) $\sin 15^\circ = \frac{AT}{3}$ .	1 pont	
$AT \approx 0,78$ (m)	1 pont	
A $BT$ távolság szögfüggvények vagy a Pitagorasztétel segítségével számítható ki.	1 pont	<i>Ez a pont a megfelelő egyenlet felírásáért jár.</i>
$BT \approx 2,90$ (m)	1 pont	
A $CTB$ háromszög hasonló az $FDE$ háromszöghöz, (mivel oldalaik páronként párhuzamosak, így megfelelő szögeik megegyeznek),	2 pont	
ezért $\frac{BT}{CT} = \frac{1}{2}$ .	1 pont	
$CT \approx 5,80$ (m)	1 pont	
A fa teljes magassága tehát ( $AT + CT \approx$ ) 6,6 méter.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ez a pont nem jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

<b>3. a)</b>		
Ha az 50 adat átlaga 0,32, akkor összegük ( $50 \cdot 0,32 =$ ) 16.	2 pont	
(Mivel az adatsokaság minden adata nemnegatív, legfeljebb 8 darab 2-es lehet az 50 adat között. (8 da- rab 2-es és 42 darab 0 esetén valóban 0,32 az átlag.)	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>3. b) első megoldás</b>		
Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és a 26. szám (és így az első 24 szám) is 0.	1 pont	
Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1 vagy 2.	1 pont	
Az 50 szám összege tehát legfeljebb 48 lehet,	1 pont	
az elérhető legnagyobb átlag pedig 0,96.	1 pont	
Mivel ez kisebb, mint 1,04, ellentmondásra jutottunk,	1 pont	
azaz nem lehet a medián 0.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>3. b) második megoldás</b>		
Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és a 26. szám (és így az első 24 szám) is 0.	1 pont	
Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1 vagy 2, vagyis ha $x$ az 1-esek, $y$ pedig a 2-esek száma, akkor $x + y \leq 24$ ,	1 pont	
és $\frac{x + 2y}{50} = 1,04$ , ahonnan $x = 52 - 2y$ .	1 pont	
Behelyettesítve az egyenlőtlenségbe: $52 - 2y + y \leq 24$ , ahonnan $y \geq 28$ .	1 pont	
Mivel ez nagyobb, mint 24, ellentmondásra jutottunk,	1 pont	
azaz nem lehet a medián 0.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>3. c)</b>		
Például 31 darab 1 és 19 darab 0 esetén 0,62 az átlag, valamint 1 a(z egyetlen) módusz,	2 pont	<i>Bármilyen jó példáért vagy más helyes indoklásért jár ez a 2 pont.</i>
tehát lehet az 50 adat módusza az 1.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4. a)</b>		
A 17 gramm 18 karátos ékszer aranytartalma $17 \cdot \frac{18}{24} =$	1 pont	
$= 12,75$ (gramm).	1 pont	
$x$ gramm 14 karátos ékszer aranytartalma: $x \cdot \frac{14}{24} = 12,75$ (gramm).	1 pont	
(Ebből $x \approx 21,86$ ), így a két gyűrű együttes tömege (a megfelelő kerekítéssel) legfeljebb 21,9 gramm.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>4. b)</b>		
A két gyűrű térfogatának összege: $V = \frac{m}{\rho} = \frac{16}{15} \approx$	1 pont	
$\approx 1,0667 \text{ cm}^3 = 1066,7 \text{ mm}^3$ .	1 pont	<i>Ez a pont a jó mértékegység-átváltásért jár.</i>
Egy gyűrű térfogata két henger térfogatának különbsége.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az egyik gyűrű belső sugara 8,5 mm, külső sugara 10 mm, és ha $x$ a keresett szélesség, akkor $V_1 = 10^2 \pi \cdot x - 8,5^2 \pi \cdot x \approx$	1 pont	
$\approx 87,2x$ (mm <sup>3</sup> ).	1 pont	
A másik gyűrű belső sugara 9,9 mm, külső sugara 11,5 mm, így $V_2 = 11,5^2 \pi \cdot x - 9,9^2 \pi \cdot x \approx$	1 pont	
$\approx 107,6x$ (mm <sup>3</sup> ).	1 pont	
$V = V_1 + V_2$ , azaz $1066,7 = 87,2x + 107,6x$ .	1 pont	
Ebből $x \approx 5,48$ mm.	1 pont	
A gyűrűk szélessége (a megfelelő kerekítéssel) 5,5 mm.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	

*Megjegyzések:*

- Ha a vizsgázó a gyűrűk megadott átmérőjét tekinti sugárnak, akkor a b) feladatra legfeljebb 8 pontot kaphat.
- Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

## II.

<b>5. a)</b>		
Az összes eset száma $\binom{10}{5} (= 252)$ ,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
a kedvező esetek száma $\binom{7}{4} (= 35)$ ,	1 pont	
így a kérdéses valószínűség: $p = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} \approx 0,139$ .	1 pont	<i>A 13,9% is elfogadható válaszként.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó rossz (pl. visszatevéses) modellt használ, akkor erre a részre 0 pont jár.*

<b>5. b) első megoldás</b>		
Bármelyik öt számot egyféleképpen lehet növekvő sorrendben kihúzni.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A megfelelő húzások (a kedvező esetek) száma tehát $\binom{10}{5} (= 252)$ .	1 pont	
(A húzási sorrendet figyelembe véve) az összes eset száma $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 (= 30\,240)$ .	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{\binom{10}{5}}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \approx 0,008$ .	1 pont	<i>A 0,8% is elfogadható válaszként.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>5. b) második megoldás</b>		
Bármelyik öt szám húzása esetén bármelyik húzási sorrend egyenlően valószínű.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Adott öt szám esetén ezek száma $5! (= 120)$ .	1 pont	
Ezek közül egy húzási sorrend növekvő.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{1}{5!} \approx 0,008$ .	1 pont	<i>A 0,8% is elfogadható válaszként.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor az a) és b) részben összesen 1 pontot veszítsen.*



<b>5. c)</b>		
A telitalálat valószínűsége: $p_5 = \frac{1}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{252} \approx 0,004$ .	1 pont	
Négy találat esetén a kedvező esetek száma: $\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{1} = 25$ ,	2 pont	
Így a négy találat valószínűsége: $p_4 = \frac{25}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{252} \approx 0,099$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>5. d) első megoldás</b>		
A szelvények eladásából származó bevétel: $240 \cdot 200 = 48\,000$ (Ft).	1 pont	
Egy szelvényre vonatkozóan a kiadás várható értéke: $p_5 \cdot 5000 + p_4 \cdot 1000 = 0,004 \cdot 5000 + 0,099 \cdot 1000 = 119$ (Ft).	2 pont	
Az eladott összes szelvényre a kiadás várható értéke: $240 \cdot 119 = 28\,560$ (Ft).	1 pont	
Így az alapítvány hasznának várható értéke: $48\,000 - 28\,560 = 19\,440$ Ft.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

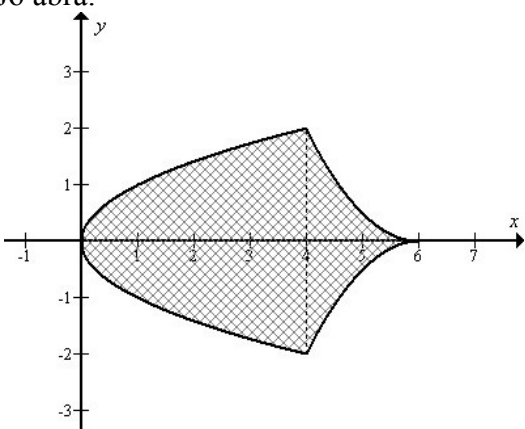
<b>5. d) második megoldás</b>		
A szelvények eladásából származó bevétel: $240 \cdot 200 = 48\,000$ (Ft).	1 pont	
Az öttalálatos szelvények számának várható értéke: $p_5 \cdot 240 = 0,004 \cdot 240 = 0,96$ .	1 pont	
A négytalálatosok számának várható értéke: $p_4 \cdot 240 = 0,099 \cdot 240 = 23,76$ .	1 pont	
Az eladott összes szelvényre a kiadás várható értéke: $0,96 \cdot 5000 + 23,76 \cdot 1000 = 28\,560$ (Ft).	1 pont	
Így az alapítvány hasznának várható értéke: $48\,000 - 28\,560 = 19\,440$ Ft.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzés: Más, helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott részeredmények és végeredmény is elfogadható.*

<b>6. a)</b>		
A tehertaxi működtetésének kilométerenkénti teljes költsége az üzemeltetésből származó $400 + 0,8x$ (Ft) költségből és a vezető $\frac{2200}{x}$ (Ft) munkadíjából tevődik össze $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A teljes költséget 1 kilométerre forintban az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 400 + 0,8x + \frac{2200}{x}$ függvény adja meg.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha bármilyen módon (pl. <math>x &gt; 0</math>) helyesen utal a függvény értelmezési tartományára.</i>
Az $f$ -nek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja 0.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$f'(x) = 0,8 - \frac{2200}{x^2}$	1 pont*	
$f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $0,8x^2 = 2200$ .	1 pont*	
Ebből $x = \sqrt{2750} \approx 52,44$ .	1 pont	
Mivel $f''(x) = \frac{4400}{x^3} > 0$ , tehát a függvény második deriváltja mindenhol, így 52,44-ben is pozitív, ezért $f$ -nek itt valóban minimuma van.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol.</i>
Tehát (egészre kerekítve) 52 km/h átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzés: A \*-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget használva: $0,8x + \frac{2200}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{0,8x \cdot \frac{2200}{x}} = 2\sqrt{1760}$ .	2 pont	
Mivel az egyenlőtlenség jobb oldala állandó, a bal oldal akkor minimális, ha éppen ezzel az állandóval egyenlő.	1 pont	
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az összeg két tagja egyenlő, azaz $0,8x = \frac{2200}{x}$ .	1 pont	

<b>6. b)</b>		
Jó ábra. 	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem készít ábrát, de a kérdéses terület jól írja fel.</i>
A kérdéses terület: $T = 2 \left( \int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^6 \frac{x^2 - 12x + 36}{2} dx \right)$	2 pont	
A zárójelben szereplő első tag primitív függvénye $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left( = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right),$	1 pont	
a második tagé pedig $\frac{x^3}{6} - 3x^2 + 18x$ .	1 pont	
(Alkalmazva a Newton-Leibniz tételt.) $T = 2 \left( \left[ \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^4 + \left[ \frac{x^3}{6} - 3x^2 + 18x \right]_4^6 \right) =$	1 pont	
$= 2 \left[ \left( \frac{16}{3} - 0 \right) + \left( 36 - \frac{104}{3} \right) \right] = 2 \left( \frac{16}{3} + \frac{4}{3} \right) = \frac{40}{3},$ tehát az embléma modelljének területe $\frac{40}{3}$ terület-egység.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>7. a) első megoldás</b>		
Ha a hatszög oldalának hossza $a$ , a rövidebb átló az $a$ oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese,	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így $a\sqrt{3} = 5\sqrt{2}$ ,	1 pont*	
ahonnan $a = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left( = \frac{5\sqrt{6}}{3} \right)$ .	1 pont*	
A szabályos hatszög területe 6 darab $a$ oldalú szabályos háromszög területének összege,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így $T = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$	1 pont	
$= 25\sqrt{3}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: A \*-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

(A hatszög középpontját $K$ -val jelölve) az $ACK$ háromszög egy $120^\circ$ -os szárszögű egyenlő szárú háromszög.	1 pont	
Ebben a háromszögben felírva a koszinusztételt: $(5\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ$ .	1 pont	
Ebből $a^2 = \frac{50}{3}$ .	1 pont	

<b>7. a) második megoldás</b>		
A szabályos hatszög felbontható hat darab, az (első megoldáshoz tartozó megjegyzés jelölésével) $ACK$ háromszöggel egybevágó háromszögre.	1 pont	
Mivel az $AC = 5\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög három darab, az $ACK$ háromszöggel egybevágó háromszögre bontható fel,	1 pont	
ezért a hatszög területe kétszerese a háromszög területének.	2 pont	
Így $T = 2 \cdot \frac{(5\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$	1 pont	
$= 25\sqrt{3}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>7. b)</b>		
A $t_1$ területű szabályos hatszög oldala az $ABC$ háromszög $AC$ oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala,	1 pont	

hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .	1 pont	
$t_1 = 6 \cdot \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$	1 pont	
(A következő szabályos hatszög $t_2$ területét megkaphatjuk például úgy, hogy a $t_1$ területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk $t_1$ -ből.) $t_2 = t_1 - 6 \cdot \frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16} \left( = \frac{225\sqrt{3}}{16} \right).$	2 pont*	
A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$ .	1 pont*	
A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ , hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Így $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{t_1}{1-q} =$	1 pont	
$= 75\sqrt{3}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	

*Megjegyzések:*

1. A \*-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó átdarabolással vagy az a) rész eredményére hivatkozva igazolja, hogy az egymást követő hatszögek területének aránya mindig  $\frac{3}{4}$ .
2. Ha a vizsgázó nem mindenhol pontos értékekkel számol, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.
3. Az utolsó 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

$t_1 + t_2 + \dots + t_n = t_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = t_1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1}$	1 pont	
Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ , ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4t_1 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 4t_1 =$	1 pont	
$= 75\sqrt{3}$ .	1 pont	

<b>8.</b>		
(Ha a keresett szám $10a + b$ , akkor – mivel két szám számtani közepe nem kisebb a számok harmonikus közepénél – a feladat szövege szerint) $\frac{a+b}{2} - \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 1$ (ahol $a$ és $b$ nullától különböző számjegyek).	2 pont	
Ezt átalakítva: $(a - b)^2 = 2(a + b)$ .	2 pont	
Mivel $a$ és $b$ számjegyek, ezért $(a - b)^2 = 2(a + b) \leq 36$ .	1 pont	
Mivel $2(a + b)$ páros, ezért $(a - b)^2$ is, tehát vagy mindkét számjegy páros vagy mindkettő páratlan.	1 pont	
Pozitív páros négyzetszám 36-ig három van: 4, 16 és 36, azaz vagy 2 vagy 4 vagy 6 a két számjegy különbsége.	1 pont	
I) $ a - b  = 2$ . Ekkor $4 = 2(a + b) \Rightarrow 2 = a + b$ .	1 pont	
(Mivel mindkettő 0-nál nagyobb egész, ezért) csak $a = 1$ , $b = 1$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon nincs megfelelő szám.	1 pont	
II) Ha $ a - b  = 4$ , akkor $a + b = 8$ .	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldva kapjuk: $a = 6$ , $b = 2$	1 pont	
vagy $a = 2$ , $b = 6$ .	1 pont	
III) $ a - b  = 6$ . Ekkor $36 = 2(a + b) \Rightarrow 18 = a + b$ .	1 pont	
(Mivel mindkettő 10-nél kisebb egész, ezért) csak $a = 9$ , $b = 9$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon sincs megfelelő szám.	1 pont	
Mivel csak a II) esetben kaptunk megoldást, ezért a megfelelő számok a 26 és a 62.	1 pont	
Ellenőrzés: a 2 és a 6 számtani közepe 4, harmonikus közepe 3, tehát megfelelnek a feladat feltételeinek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>16 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó megvizsgál minden szóba jöhető  $(a, b)$  számpárt, és helyesen kiválasztja a feladat megoldásait, akkor maximális pontszámot kaphat.*

<b>9. a)</b>		
Akkor kapunk négy megfelelő hűrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. (A körüjárás irányának megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik.)	1 pont	
(Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért) a kedvező esetek száma 5.	1 pont	
Az összes eset száma: $\binom{10}{4}$ .	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{5}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42} (\approx 0,024)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>9. b)</b>		
Ha mindhárom pontot érintjük, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség van.	1 pont	
Ha csak két ponton megyünk át, akkor a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$ .	1 pont	
Ha csak egy ponton megyünk át, akkor 3 lehetőség van, de közvetlenül is átmehetünk $A$ -ból $C$ -be, ez még 1 eset.	1 pont	
Az összes lehetséges útvonalak száma tehát: $6 + 6 + 3 + 1 = 16$ .	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó a fentiek közül csak egy esetet vizsgált.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges útvonalat helyesen felsorolja, akkor a maximális pontszám jár.*

<b>9. c) első megoldás</b>		
Az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, amikor csak 2 vagy 1 szín szerepel.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Mindegyik húrt háromféle színre festhetjük, ezért az összes lehetőség száma: $3^{10}$ (= 59 049).	1 pont	
Ha két színt használunk a háromból, akkor az adott két szín segítségével mindegyik húrt kétféleképpen színezhethetjük ki, a tíz húrt $2^{10}$ -féleképpen.	1 pont	
De ebbe beleszámoltuk azt az esetet is, amikor csak egyetlen színt használunk, ezért a fenti értéket 2-vel csökkenteni kell: $2^{10} - 2$ .	1 pont	
A megadott 3 színből kettőt 3-féleképpen választhatunk ki, így a pontosan két színt használó színezések száma $3 \cdot (2^{10} - 2)$ (= 3066).	1 pont	
Pontosan egy színnel 3-féleképpen színezhethetjük ki a húrokat.	1 pont	
Tehát a lehetséges színezések száma: $3^{10} - [3 \cdot (2^{10} - 2)] - 3 =$	1 pont	
= 55 980.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>9. c) második megoldás</b>		
(Számoljuk össze az eseteket aszerint, hogy az egyes színekkel hány húrt színezzük ki.) Lehetséges, hogy az egyik színnel 8, a másik két színnel 1-1 húrt színeztünk. Ekkor $\binom{10}{8} = 45$ -féleképpen választhatjuk meg azt, hogy melyik 8 húrt színezzük az első, majd $\binom{2}{1} = 2$ -féleképpen azt, hogy melyik húrt színezzük a második színnel (a harmadik szín felhasználása ezek után már egyértelmű).	1 pont	<i>Ez a 2 pont jár bármelyik <math>10 = a + b + b</math> típusú eset helyes kiszámolásáért.</i>
Háromféleképpen választhatjuk meg azt, hogy a három közül melyik színből legyen 8, így az összes lehetőségek száma ebben az esetben $45 \cdot 2 \cdot 3 = 270$ .	1 pont	



<p>Lehetséges, hogy az egyik színnel 7, egy másikkal 2, a harmadikkal 1 húrt színeztünk.</p> <p>Ekkor <math>\binom{10}{7} = 120</math>-féleképpen választhatjuk meg azt, hogy melyik 7 húrt színezzük az első, majd <math>\binom{3}{2} = 3</math>-féleképpen azt, hogy melyik húrt színezzük a második színnel (a harmadik szín felhasználás ezek után már egyértelmű).</p>	1 pont	<p><i>Ez a 2 pont jár bármelyik <math>10 = a + b + c</math> típusú eset helyes kiszámolásáért.</i></p>
<p>Háromféleképpen választhatjuk meg azt, hogy a három közül melyik színből legyen 7, majd kétféleképpen azt, hogy melyik színből legyen 2, így az összes lehetőségek száma ebben az esetben <math>120 \cdot 3 \cdot 6 = 2160</math>.</p>	1 pont	
<p>Hasonló gondolatmenetet követve a többi esetben a megfelelő színezések száma:</p> $6 + 3 + 1 \Rightarrow \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{3} \cdot 6 = 210 \cdot 4 \cdot 6 = 5040$ $6 + 2 + 2 \Rightarrow \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 = 210 \cdot 6 \cdot 3 = 3780$ $5 + 4 + 1 \Rightarrow \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4} \cdot 6 = 252 \cdot 5 \cdot 6 = 7560$ $5 + 3 + 2 \Rightarrow \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot 6 = 252 \cdot 10 \cdot 6 = 15\,120$ $4 + 4 + 2 \Rightarrow \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot 3 = 210 \cdot 15 \cdot 3 = 9450$ $4 + 3 + 3 \Rightarrow \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot 3 = 210 \cdot 20 \cdot 3 = 12\,600$	3 pont	<p><i>Egy hiányzó vagy hibás eset esetén 2 pont, két hiányzó vagy hibás eset esetén 1 pont jár, kettőnél több hiányzó vagy hibás eset esetén nem jár pont.</i></p>
<p>Az összes lehetséges színezések száma a fenti 8 esetben kapott lehetőségek számának összege, tehát 55 980.</p>	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	